



# Lösungswege

## Mathematik Oberstufe

# 6

Philipp Freiler  
Julia Marsik  
Markus Olf  
Markus Wittberger

### 3. Semester

#### Terme, Gleichungen und Ungleichungen

<b>1</b>	<b>Potenzen</b> .....	6
	1.1 Potenzen mit natürlichen Exponenten .....	7
	1.2 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten .....	9
	1.3 Potenzen mit rationalen Exponenten .....	15
	1.4 Potenzen mit reellen Exponenten .....	18
	<b>Vernetzung – Typ-2-Aufgaben</b> .....	19
	<b>Selbstkontrolle</b> .....	20
	<b>Kompetenzcheck Terme, Gleichungen und Ungleichungen 1</b> .....	21
<b>2</b>	<b>Logarithmus und Exponentialgleichungen</b> .....	22
	2.1 Logarithmus .....	23
	2.2 Exponentialgleichungen .....	27
	<b>Vernetzung – Typ-2-Aufgaben</b> .....	30
	<b>Selbstkontrolle</b> .....	31
<b>3</b>	<b>Ungleichungen</b> .....	32
	3.1 Lineare Ungleichungen .....	33
	3.2 Ungleichungen mit Fallunterscheidungen .....	38
	<b>Vernetzung – Typ-2-Aufgaben</b> .....	41
	<b>Selbstkontrolle</b> .....	42
	<b>Kompetenzcheck Terme, Gleichungen und Ungleichungen 2</b> .....	43

#### Funktionen

<b>4</b>	<b>Untersuchen reeller Funktionen</b> .....	44
	4.1 Monotonie und Extremstellen von Funktionen .....	45
	4.2 Symmetrie und Periodizität .....	51
	4.3 Bijektive Funktionen und Umkehrfunktionen .....	54
	4.4 Verkettungen von Funktionen .....	56
	4.5 Verallgemeinern des Funktionsbegriffs .....	57
	4.6 Änderungsmaße .....	60
	<b>Vernetzung – Typ-2-Aufgaben</b> .....	63
	<b>Selbstkontrolle</b> .....	64
<b>5</b>	<b>Potenzfunktionen und Polynomfunktionen</b> .....	66
	5.1 Potenzfunktionen .....	67
	5.2 Polynomfunktionen .....	74
	<b>Vernetzung – Typ-2-Aufgaben</b> .....	77
	<b>Selbstkontrolle</b> .....	78
	<b>Kompetenzcheck Funktionen 1</b> .....	80
<b>6</b>	<b>Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen</b> .....	82
	6.1 Graph und Eigenschaften der Exponentialfunktion .....	83
	6.2 Wachstums- und Abnahmeprozesse modellieren .....	90
	6.3 Logarithmusfunktionen .....	97
	<b>Vernetzung – Typ-2-Aufgaben</b> .....	99
	<b>Selbstkontrolle</b> .....	100
<b>7</b>	<b>Winkelfunktionen</b> .....	102
	7.1 Das Bogenmaß .....	103
	7.2 Sinus-, Cosinus- und Tangensfunktion .....	105
	7.3 Harmonische Schwingungen .....	110
	<b>Vernetzung – Typ-2-Aufgaben</b> .....	115
	<b>Selbstkontrolle</b> .....	116
	<b>Kompetenzcheck Funktionen 2</b> .....	118

#### Folgen und Reihen

<b>8</b>	<b>Folgen</b> .....	120
	8.1 Zahlenfolgen und ihre Darstellung .....	121
	8.2 Monotonie und Grenzwert .....	125
	8.3 Arithmetische Zahlenfolgen .....	130
	8.4 Geometrische Zahlenfolgen .....	133
	<b>Vernetzung – Typ-2-Aufgaben</b> .....	136
	<b>Selbstkontrolle</b> .....	137

# 1.1 Potenzen mit natürlichen Exponenten

KOMPETENZEN

Lernziele:

- Die Deutung einer Potenz mit natürlichem Exponenten ( $\neq 0$ ) als wiederholte Multiplikation kennen
- Die Rechenregeln für Potenzen kennen und anwenden können
- Das Pascal'sche Dreieck kennen

Grundkompetenz für die schriftliche Reifeprüfung:

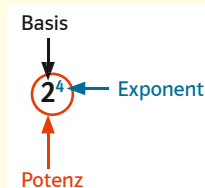
AG-R 1.2 Wissen über algebraische Begriffe angemessen einsetzen können: Variable, Terme, Formeln, (Un-)Gleichungen, Gleichungssysteme, Äquivalenz, Umformungen, Lösbarkeit

VORWISSEN

MERKE

## Potenzen mit natürlichen Exponenten

Eine Potenz mit einem natürlichen Exponenten (einer natürlichen Hochzahl) stellt die wiederholte Multiplikation ein und desselben Faktors dar. Dabei gibt der Exponent an, wie oft der Faktor auftritt. Allgemein gilt für  $a \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :  $a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$  ( $n$  Faktoren)  
 $a^1 = a$  (Produkt mit einem Faktor)



MUSTER

1. Gib in Potenzschreibweise bzw. als wiederholte Multiplikation an.

- a)  $e \cdot e \cdot e \cdot e \cdot e \cdot e$     c)  $(a + b) \cdot (a + b)$     e)  $10^6$     g)  $(x - y)^4$   
 b)  $v \cdot v \cdot v \cdot v$     d)  $a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot a \cdot a$     f)  $x^5$     h)  $(a + b)^2 \cdot (a - b)^3$

2. Berechne den Wert der Potenz.    a)  $(-3)^4$     b)  $(-3)^3$     c)  $-3^4$

- a)  $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 3^4 = 81$     c)  $-3^4 = (-1) \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = -81$   
 b)  $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -3^3 = -27$     -1 wird nicht potenziert!

3. Berechne den Wert der Potenz.

- a)  $(-2)^3$     b)  $(-2)^4$     c)  $-2^6$     d)  $(-2)^8$     e)  $(-2)^5$     f)  $-2^7$

AG-R 1.2 M

4. Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an.

- A   $-2^4 \neq (-2)^4$     B   $-2^4 = (-2)^4$     C   $(-2)^3 \neq -2^3$     D   $(-1)^3 = -1^3$     E   $(-1)^9 = (-1)^{10}$

5. Begründe: für  $a \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  gilt:

- a)  $(-a)^n = a^n$ , wenn  $n$  gerade    b)  $(-a)^n = -a^n$ , wenn  $n$  ungerade

## Rechenregeln für Potenzen mit natürlichen Exponenten

Für das Multiplizieren, Dividieren und Potenzieren von Potenzen mit gleichen Basen (Grundzahlen) können Rechenregeln aufgestellt werden.

Für die Multiplikation gilt:  $a^4 \cdot a^3 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^7$  (4 + 3 Faktoren)

Für die Division gilt:  $a^5 : a^2 = \frac{a^5}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = a^3$

Nach dem Kürzen bleiben  $5 - 2 = 3$  Faktoren übrig.

Das Potenzieren ist ein wiederholtes Multiplizieren derselben Potenz.

Es gilt:  $(a^3)^2 = a^3 \cdot a^3 = a^{3+3} = a^{3 \cdot 2} = a^6$

## Lineare Ungleichungen mit zwei Variablen

In einer linearen Ungleichung mit zwei Variablen werden die zwei Unbekannten meist mit  $x$  und  $y$  bezeichnet, z. B.  $y + 3 \leq x$ .

**MUSTER**

**163.** Bestimme die Lösungsmenge der Ungleichung  $y + 3 \leq x$  und stelle sie graphisch dar.

Die Lösungsmenge besteht nicht nur aus einzelnen Zahlen, sondern aus Zahlenpaaren  $(x | y)$ .  $(12 | 3)$  ist beispielsweise eine Lösung der Ungleichung  $y + 3 \leq x$ , da gilt:

$$3 + 3 \leq 12$$

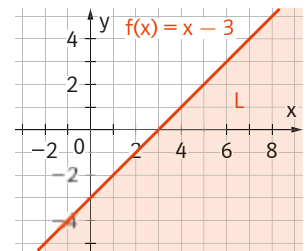
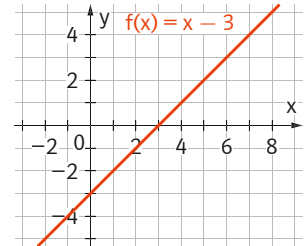
$$6 \leq 12 \quad \text{wahre Aussage}$$

Forme die Ungleichung nach  $y$  um:  $y + 3 \leq x \quad | -3$   
 $y \leq x - 3$

Die Lösungsmenge  $L$  besteht aus allen Zahlenpaaren, die diese Bedingung erfüllen:  $L = \{(x | y) | y \leq x - 3 \text{ mit } x, y \in \mathbb{R}\}$

Für die graphische Darstellung von  $L$  deutet man die rechte Seite der Ungleichung als Funktion  $f(x) = x - 3$  und zeichnet die Gerade in ein Koordinatensystem.

Alle Punkte mit  $y \leq x - 3$ , d. h. alle Punkte, die unterhalb oder auf der Geraden liegen, stellen die Lösungsmenge  $L$  dar.



**164.** Stelle die Lösungsmenge der Ungleichung graphisch dar.

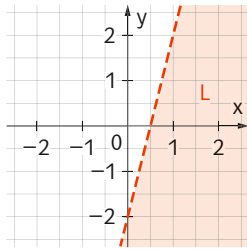
- a)  $x + 2y > 4$     b)  $-x < 4 - y$     c)  $x + y > 0$     d)  $4x - 6y < 12$

AG-R 2.4

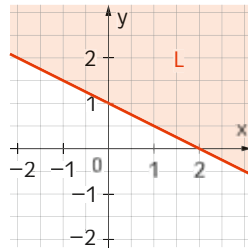
**M**

**165.** Ordne der dargestellten Lösung die lineare Ungleichung mit zwei Variablen zu.

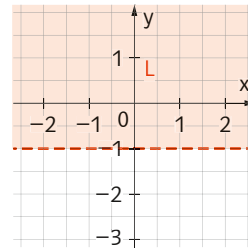
1



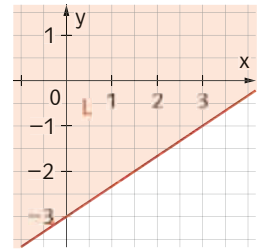
2



3



4



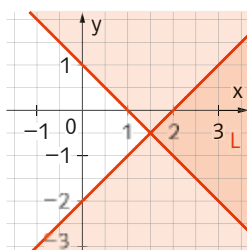
- A:  $y > 4x - 2$     B:  $y < 4x - 2$     C:  $y \geq \frac{2}{3}x - 3$     D:  $y > \frac{2}{3}x - 3$     E:  $y > -1$     F:  $y \geq -0,5x + 1$

**166.** Stelle die Schnittmenge der beiden Lösungsmengen der Ungleichungen graphisch dar.

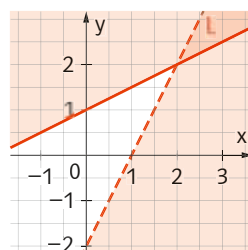
- a)  $x - 2y > 2 \wedge x + 3y > 6$     b)  $-2x < 4 - y \wedge x - 3y > 0$     c)  $2x - 3y > 6 \wedge x + y < 3$

**167.** Gib das zur Lösungsmenge passende System zweier linearer Ungleichungen an.

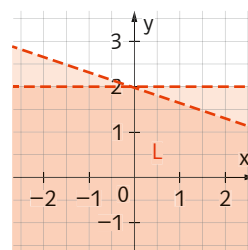
a)



b)



c)



d)

